

9

几种类型的 极值问题

范会国

北京市数学会编 · 人民教育出版社



书号 13012 · 0247

定价 0.14 元

数 学 小 丛 书

(9)

几种类型的极值问题

范 会 国

北京市教学会编

人 民 教 育 出 版 社

1964 年·北京

这本小册子是为中学生写的，开头先从一些实际事例说明极大极小问题的性质，接下去就在中学数学的基础上，从二次函数的极大极小讲起，讲了几种类型不涉及高等数学的极值问题，并且适当地举一些联系实际、有趣的例子；最后，把所讲的这些类型统一在一个一般定理之下，书末附有一些习题，通过对这些习题的演解，读者可以更好地了解 and 运用所讲的理论。书中某些定理的证明，虽然不引用高等数学，但是方法上有点近似高等数学，当然不超出中学程度的读者所能理解的范围。这可能使读者的逻辑思维能力提高一步，并为学习高等数学作一导引。

几种类型的极值问题

范 合 国

人民教育出版社出版（北京沙滩后街）

总发行所北京发行所发行

全国新华书店经售

兰州新华印刷厂印装

统一书号：13012·0247 字数：24 千

开本：787×1092 毫米 1/32 印张：1 $\frac{1}{2}$

1961 年 2 月新一版

1973 年 1 月第 2 次印刷

印数 34,001—331,000 册

定价 0.14 元

编者的话

数学课外读物对于帮助学生学好数学，扩大他们的数学知识领域，是很有好处的。近年来，越来越多的中学学生和教师，都迫切希望出版更多的适合中学生阅读的通俗数学读物。我们约请一些数学工作者，编了这套“数学小丛书”，陆续分册出版，来适应这个要求。

这套书打算介绍一些课外的数学知识，以扩大学生的知识领域，加深对数学基础知识的掌握，引导学生独立思考，理论联系实际。

这是我们的初步想法和尝试。热切地希望数学工作者和读者对我们的工作提出宝贵的意见和建议，更希望数学工作者为中学生写出更多更好的数学课外读物。

北京市数学会

1962年4月

目 次

一	引言.....	3
二	从二次函数的极大极小談起.....	5
三	二因子的积的极大問題和二項的和的极小問題.....	9
四	任意个因子的积的极大問題.....	16
五	任意多項的和的极小問題.....	31
六	极大极小問題的互逆性.....	40
附录	习題答案和提示.....	44

一 引 言

一群同类量中,若有一量大于其他的量,那末这个量叫做这群量的**极大**;若有一量小于其他的量,那末这个量叫做这群量的**极小**. 这样的极大极小叫做**绝对极大极小**,以区别于高等数学中通常所考虑的所谓**局部极大极小**. 所谓函数 $f(x)$ 的局部极大,就是这函数的这样的值 $f(x_1)$,当自变数 x 足够邻近 x_1 时,对应的其他的函数值都比 $f(x_1)$ 小;所谓函数 $f(x)$ 的局部极小,就是这函数的这样的值 $f(x_2)$,当自变数 x 足够邻近 x_2 时,对应的其他的函数值都比 $f(x_2)$ 大.

极大极小,通常统称极值.

极值(局部极值和绝对极值)问题是自然科学、工程技术、国民经济以及生活实践中常常遇到的,不过问题的形式和性质往往随具体情况而异罢了. 极值问题所以成为数学的一个重要对象,就是这个缘故.

比方关于气体的体积 V 、压力 p 和绝对温度 T 的关系,从物理学知道,有个叫做**范德瓦耳斯**(Van der Waals)公式:

$$p = -\frac{a}{V^2} + \frac{RT}{V-b},$$

其中 a, b, R 都是只同所考虑的气体有关的正常数. b 是当 p 趋于无穷时,体积 V 的极限值. 因此,恆設 $V > b$. 如果假定温度 T 不变,那末压力 p 就只依赖于体积 V ,当 V 变时, p 随之而变. 现在要求 p 的极大和极小,这就是一个极值问题.

又比方下边一个关于运输的问题：有货物要从铁路 AB 上的 A 城运往和铁路相距是 $BO=l$ 的 O 城（图 1）。运一个单位重量经过一个单位路程的运费在铁路上是 α ，在公路上是 β 。显然，运费的多少是同铁路上所经过的路程和公路上所经过的路程有关的。因此，就有这样一个问题：应该从铁路上哪一处 M 起修筑公路 MO ，使循路线 AMC 从 A 城到 O 城的运费最低廉？我们来看怎样用数学来处理这个问题。命

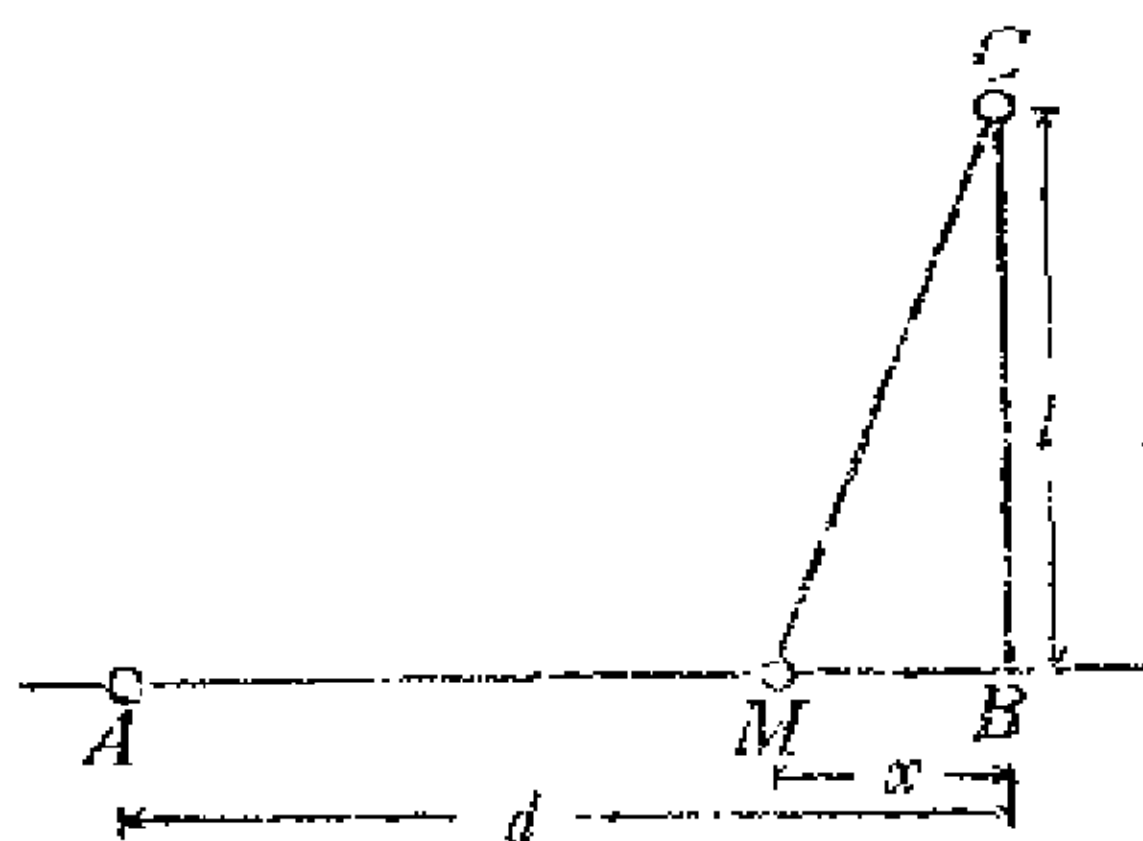


图 1.

一个单位重量经过一个单位路程的运费在铁路上是 α ，在公路上是 β 。显然，运费的多少是同铁路上所经过的路程和公路上所经过的路程有关的。因此，就有这样一个问题：应该从铁路上哪一处 M 起修筑公路

MO ，使循路线 AMC 从 A 城到 O 城的运费最低廉？我们来看怎样用数学来处理这个问题。命

$$AB=d, \quad MB=x,$$

依题意，容易知道一个单位重量的货物的运费

$$y=\alpha(d-x)+\beta\sqrt{x^2+l^2}, \quad 0 \leq x \leq d.$$

可见得我们的问题就是求函数 y 的极小值。所以这这也是一个极值问题。

又比方著名的所谓“最速降线问题”：设 A, B 是不在同一铅直线上的二定点（图 2）。在 A 点的一个静止的质点要在重力作用下沿一条曲线滑到 B 。显然，沿着

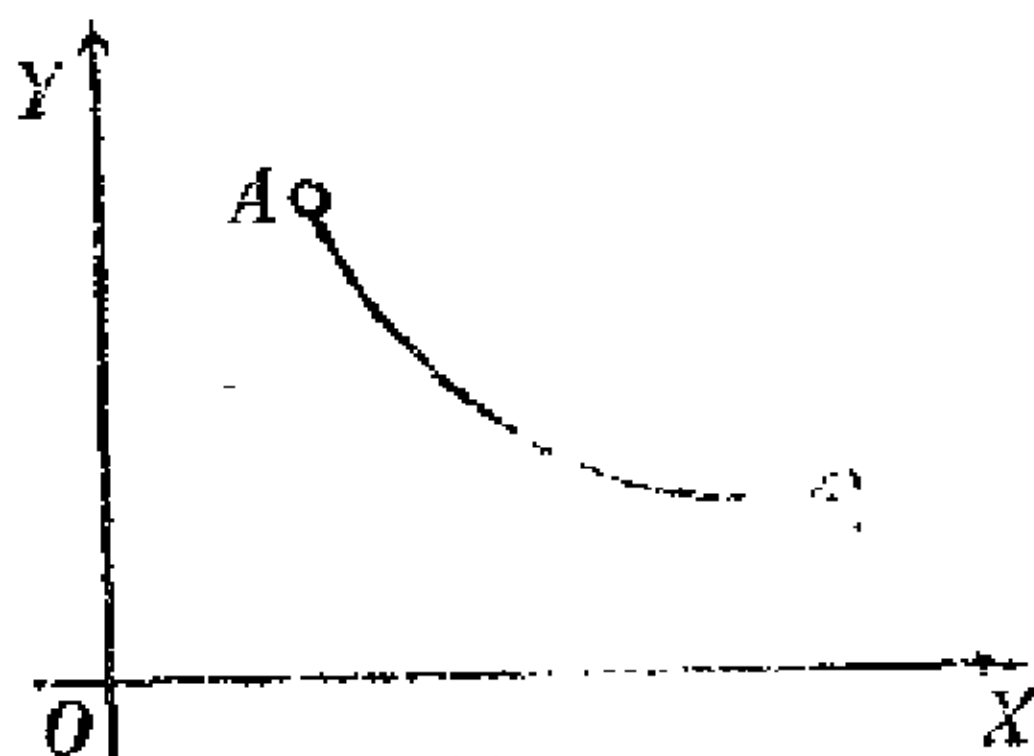


图 2.

點 A 和 B 的不同曲綫，質點從 A 滑到 B 需要不同的時間。問題是要確定一條由 A 到 B 的曲綫，使質點沿這條曲綫從 A 滑到 B 所需要的時間最少。這個問題的解是伯努利 (Bernoulli) 兄弟、牛頓 (Newton)、羅比達 (l'Hospital) 等人得出的。如同上面二個問題，這個問題也是一個極值問題。但是應該指出，它在本質上同上面二個問題有區別。因為第一個問題是要確定自變數 V 的某些數值，使函數 p 所取到的對應值是極大或極小。第二個問題也是一樣，是要確定自變數 α 的某些數值，使函數 y 所取到的對應值是極小。但是，在最速降綫問題中，所要確定的不是一個或幾個數值，而是一條曲綫，就是說一個函數，使得依賴于這曲綫的時間是極小。若用 T 表示時間， $y = f(x)$ 表示曲綫，那末，對於每一函數 $f(x)$ ， T 都有一確定的值同它相應。問題就是要確定一個函數 $f(x)$ ，使 T 的對應值是極小。

以上所舉的這些極值問題以及一般的極值問題的解決，要用到高等數學，超出了這本小冊子的水平，不能在這裡論述。但是，也有一些極值問題，特別是幾何中的許多極值問題，不需要高等數學，只要用初等數學也可以解決，而且在計算上也並不很繁瑣。這就是我們這本小冊子所要講的內容。

其次，我們在這本小冊子里所談的極值，只限于絕對極值，因為要講局部極值，一般需要用到高等數學。

二 從二次函數的極大極小談起

二次函數 $ax^2 + bx + c$ ，雖然簡單易懂，却很重要而且常常

用到，中学代数里也是作为重点的，专门有一章讲它，因此，我们就在中学所讲过的基础之上，从二次函数的极大极小谈起。

我们来探讨一下，当 x 从 $-\infty$ 渐增到 $+\infty$ 时，二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 是怎样变化的，这里 x 是自变数， y 是 x 的函数， a, b, c 是已知常数。

由于 $a \neq 0$ ，我们可以把这个二次函数写成如下的形式：

$$y = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right),$$

于是若命

$$z = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a},$$

那末

$$y = az.$$

我们只要研究二次函数

$$z = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$$

的变化状况，就容易推出函数 y 的变化状况。

用配方的方法，我们有

$$z = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}.$$

可见得 z 的值是两部分的代数和，其中一部分 $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$ 是常数，另一部分 $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$ 是变的。要看出当 x 渐增时 z 的变化状况，只要看出变的部分 $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$ 的变化状况。

当 x 从 $-\infty$ 渐增到 $-\frac{b}{2a}$ 时，量 $x + \frac{b}{2a}$ 是负的，它的值从 $-\infty$ 渐增到 0；因此，它的绝对值从 $+\infty$ 渐减到 0；从而它的平方也从 $+\infty$ 渐减到 0。所以当 x 从 $-\infty$ 渐增到 $-\frac{b}{2a}$ 时， z

从 $+\infty$ 渐减到 $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$.

当 x 从 $-\frac{b}{2a}$ 渐增到 $+\infty$ 时, $x + \frac{b}{2a}$ 是正的, 它的值从 0 渐增到 $+\infty$; 它的平方也从 0 渐增到 $+\infty$; 所以 z 从 $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ 渐增到 $+\infty$.

上面說的结果可以列表如下:

x	$-\infty$	\nearrow	$-\frac{b}{2a}$	\nearrow	$+\infty$
z	$+\infty$	\searrow	$\frac{4ac-b^2}{4a^2}$	\nearrow	$+\infty$

现在来看一看 y 的变化状况, 就是說, 二次三项式 $ax^2 + bx + c$ 的变化状况. 因为

$$y = az,$$

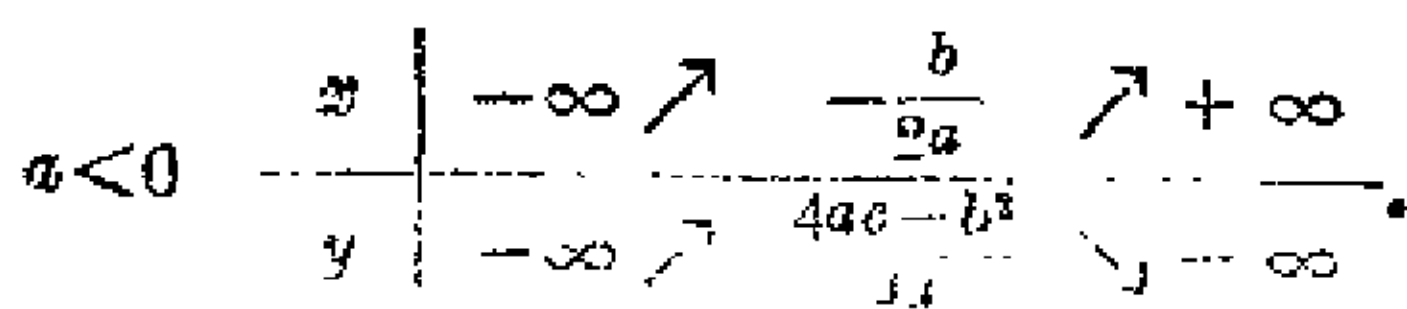
所以, 依照 a 是正或负, 就有两种情形.

第一种情形: $a > 0$. 在这种情形, 当 z 渐增时, y 也渐增; 当 z 变小时, y 也变小. 所以得 y 的变化状况如下表:

$a > 0$	x	$-\infty$	\nearrow	$-\frac{b}{2a}$	\nearrow	$+\infty$
	y	$+\infty$	\searrow	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	\nearrow	$+\infty$

从这里清楚地看出, 在这种情形, 当自变数 x 从 $-\infty$ 渐增到 $-\frac{b}{2a}$ 时, 函数 y 从 $+\infty$ 渐减到 $\frac{4ac-b^2}{4a}$; 而当 x 繼續从 $-\frac{b}{2a}$ 渐增到 $+\infty$ 时, y 就停止减小, 改做从 $\frac{4ac-b^2}{4a}$ 渐增到 $+\infty$. 所以函数 y 的对应于 $x = -\frac{b}{2a}$ 的值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$ 是极小.

第二种情形: $a < 0$. 在这种情形, 当 z 变小时, 函数 $y = az$ 变大, 而当 z 变大时 y 却变小. 所以得 y 的变化状况如下表:



从这里清楚地看出,在这种情形,当自变数 x 从 $-\infty$ 渐增到 $-\frac{b}{2a}$ 时,函数 y 从 $-\infty$ 渐增到 $\frac{4ac-b^2}{4a}$;而当 x 继续从 $-\frac{b}{2a}$

渐增到 $+\infty$ 时, y 就停止增大,改做从 $\frac{4ac-b^2}{4a}$ 渐减到 $-\infty$.

所以函数 y 的对应于 $x = -\frac{b}{2a}$ 的值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$ 是极大.

例 1 当用实验确定一个量 x 时,由于仪器的不够完善或操作的不够精细,对同一个量作 n 次观测,会得到 n 个不同的值

$$a_1, a_2, \dots, a_n.$$

如果量 x 的某一个值同这 n 个值的差的平方和是最小,那末这个值就叫做量 x 的“最可能的”值。求这个“最可能的”值。

解 求这个“最可能的”值就是求 x 的一个值,使得函数

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + \dots + (x-a_n)^2 \\ &= nx^2 - 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)x + (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \end{aligned}$$

的对应值是极小。为此,我们用上边所得的关于二次函数的结果。由于 x^2 的系数在这里是 $n > 0$, x 的系数在这里是 $-2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$,立刻可知函数 $f(x)$ 当

$$x = -\frac{-2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)}{2n} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

时是极小。这样, x 的“最可能的”值就是用实验得到的值的算术平均。

我们也可以利用高等数学和初等数学的别的方法来解这

个問題^①，并且都很简单，不过上面的解法是最简单不过了。

例 2 設从边长是 a 和 b 的一个矩形 $ABCD$ 的二对頂点(譬如 A, C) 起，在邻边上取同一长度 $AG = AH = CE = CF = x$ (图 3)，那末就得到平行四边形 $EFHG$ ，它的面积的大小显然随 x 而变，試問要令 x 取怎样的值，所得到的平行四边形 $EFHG$ 的面积才是极大。

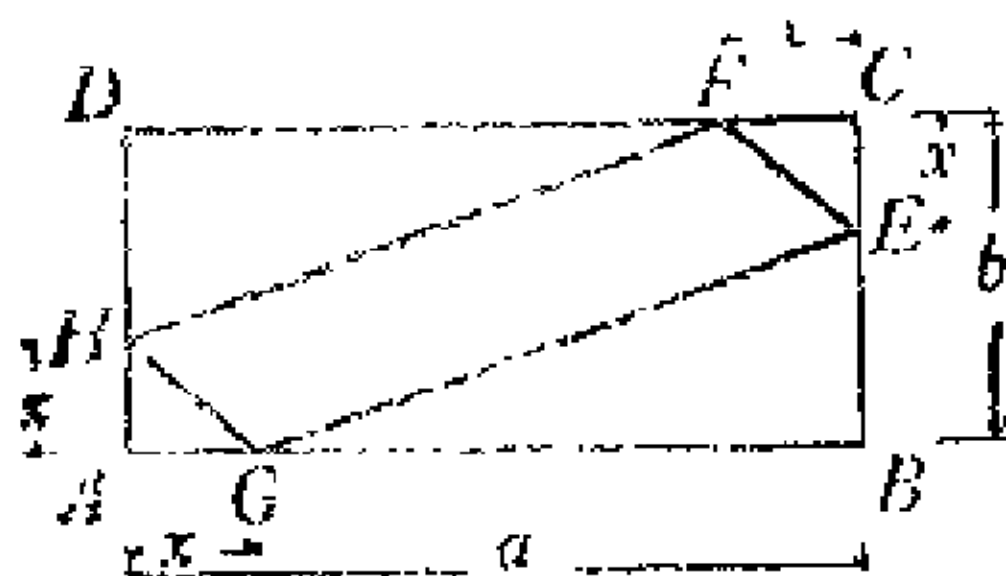


图 3

解 設 $AB = a$ ， $BC = b$ ， S 是平行四边形 $EFHG$ 的面积，就有

$$S = ab - a^2 - (a-x)(b-x) = -2x^2 + (a+b)x.$$

可見得使 S 是极大的 x 值是：

$$x = -\frac{(a+b)}{2 \cdot (-2)} = \frac{a+b}{4},$$

而 S 的对应的极大值是：

$$S = \frac{(a+b)^2}{8}.$$

三 二因子的积的极大問題和二項的和的极小問題

現在我們來討論和是定值的二个正变数的积的变化状况。設 a 是二个正变数的和， x 是其中的一数，那末另一数就是 $a-x$ 。由于假定二数都是正的，問題就是研究当 x 从 0 漸

^① 参閱这一套丛书里更詳細，(平均)，第 5 頁。

增到 a 时, 函数

$$y = x(a - x) = -x^2 + ax$$

的变化状况。这是一个二次函数, 其中 x^2 的系数是负的, 所以根据第二节的结果, 就得到函数 y 的变化状况如下表:

x	0	\nearrow	$\frac{a}{2}$	\nearrow	a
y	0	\nearrow	$\frac{a^2}{4}$	\searrow	0

可见得积 $y = x(a - x)$ 当 $x = \frac{a}{2}$, 也就是当 $x = a - x$ 时是极大。换句话说, 就是当二因子相等时, 它们的积是极大。从这里得到下面的定理:

定理 1 设二个正变数的和是定值, 那末当这二数相等时^①, 它们的积是极大。

这个定理的几何证法, 也很简单, 现在顺便给出。

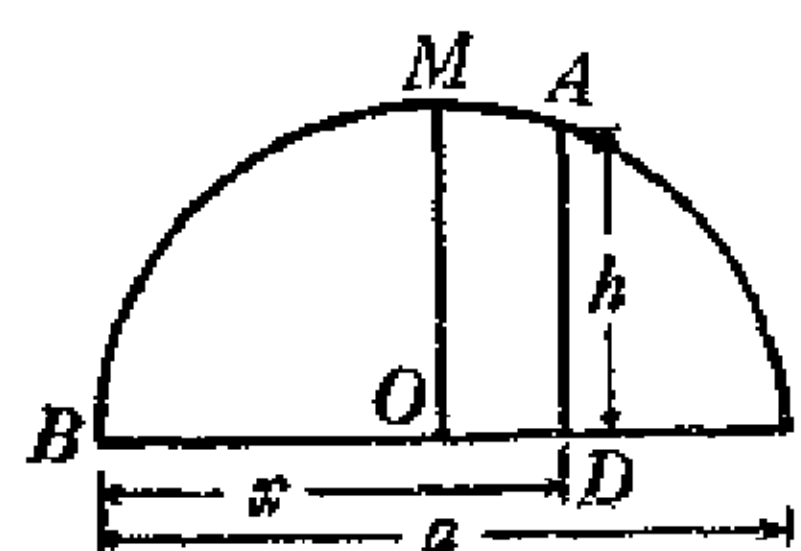


图 4.

设 $BC = a$ (二数的和). 用 BC 做直径作半圆周 (图 4). 令 $BD = x$, $DA = h$, 其中 A 是直径 BC 在点 D 的垂线同半圆周的交点, 于是有

$$BD \times DC = \overline{DA}^2;$$

即

$$x(a - x) = h^2.$$

设 O 是 BC 的中点, M 是 BC 在点 O 的垂线同半圆周的交

^① 注意, 正如布拉里-福尔帝 (Barali-Porti) 所指出, 必须这二数能相等, 见《数学教学》[L'Enseignement Mathématique (1910)] 第 512 页. 对于下面的定理 2, 也是这样.

点,那末就有

$$BO \times OC = \overline{OM}^2.$$

但是

$$OM > DA.$$

可見当 $x = BO = OC = a - x$, 即 $x = \frac{a}{2}$ 时, 积 $x(a-x)$ 是极大.

應該指出, 在定理 1 的头一个証明中, 只利用了二次函数的变化状况, 所以和是定值的二因子的号可以是任意的, 而不必限制它們都是正的. 現在来直接証明这个論断. 为此, 先建立下面的引理(以后还要用到).

引理 和是定值的二个变数的积当这二数的差的绝对值减小时增大, 而当这个差的绝对值增大时减小.

事实上, 設 x, y 是任意二数, 我們有恆等式

$$4xy = (x+y)^2 - (x-y)^2.$$

这个恆等式指出, 当二个变数 x, y 的和是定值 a 时, 有

$$4xy = a^2 - (x-y)^2.$$

可見当二数 x, y 的差的绝对值减小时, 积 xy 增大, 而当这个差的绝对值增大时, 积 xy 就减小. 这就証明了引理.

現在回头来証明上面所提出的論断. 当 x 从 $-\infty$ 渐增到 $+\infty$ 时, 二因子 $(a-x)$ 和 x 的差 $(a-2x)$ 渐变小; 当 x 小于 $\frac{a}{2}$ 时, 它是正的, 而当 x 大于 $\frac{a}{2}$ 时, 它是負的. 因此, 当 x 从 $-\infty$ 渐增到 $\frac{a}{2}$ 时, 差 $(a-2x)$ 的绝对值渐变小, 而当 x 从 $\frac{a}{2}$ 繼續渐增到 $+\infty$ 时, 差 $(a-2x)$ 的绝对值渐增大; 从而根据引理可見, 当 x 从 $-\infty$ 渐增到 $\frac{a}{2}$ 时, 积 $x(a-x)$ 渐增, 而当 x 繼續从 $\frac{a}{2}$ 渐增到 $+\infty$ 时, 积 $x(a-x)$ 渐减. 这說明积 $x(a-x)$ 当 $x = \frac{a}{2}$, 即 $x = a - x$ 时取到极大值. 上面所提出的論断便得到

証明.

順便指出,用定理 1 来解上面的例 2,也很簡便.事实上,由于所考虑的平行四边形的面积是

$$S = -2x^2 + (a+b)x = 2x\left(-x + \frac{a+b}{2}\right),$$

而二因子 x 和 $\left(-x + \frac{a+b}{2}\right)$ 的和是定值,由定理 1 知道,这面积 S 当 $x = -x + \frac{a+b}{2}$, 即 $x = \frac{a+b}{4}$ 时是极大. 这就是前面所得到的結果.

例 3 在半径是 R 的圓里,求作周长是极大的內接长方形.

为使讀者体会同一問題可以有不同的解法,結果是殊途同归,我們借这个簡單問題的机会,給出两个解法.

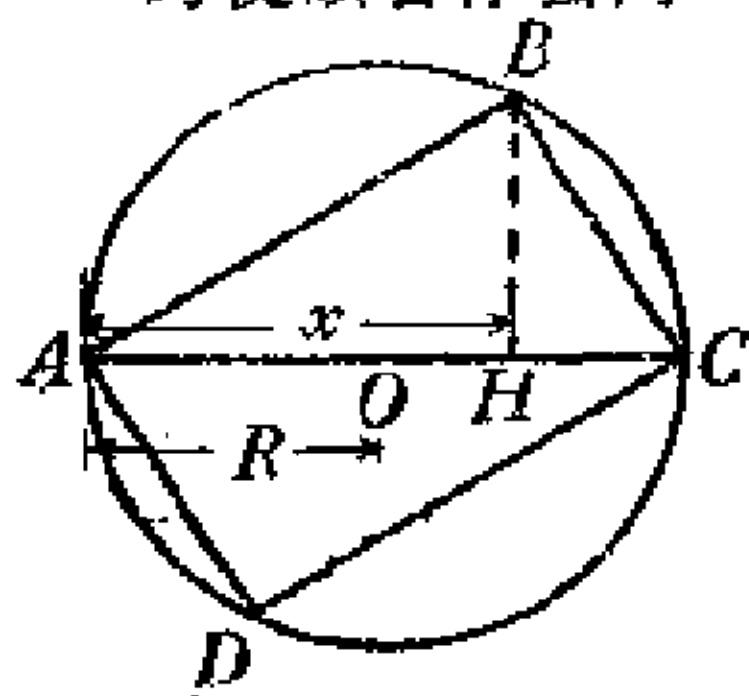


图 5.

解 1 設 $ABCD$ 是一內接于圓的长方形(图 5), $2p$ 是它的周长,那末有

$$2p = 2AB + 2BC,$$

而問題就是求

$$p = AB + BC$$

的极大值.

取 $AH = x$ 是未知量,其中 H 是从 B 到 AO 的垂綫同 AC 的交点,那末有

$$AB = \sqrt{2Rx}, \quad BC = \sqrt{2R(2R-x)}.$$

于是 $p = \sqrt{2Rx} + \sqrt{2R(2R-x)} = \sqrt{2R}(\sqrt{x} + \sqrt{2R-x}),$

$$\begin{aligned}\text{因之} \quad p^2 &= 2R[x + 2R - x + 2\sqrt{x(2R-x)}] \\ &= 4R[R + \sqrt{x(2R-x)}].\end{aligned}$$

可見 p^2 因之 p 同 $x(2R-x)$ 同时是极大, 但是 x 和 $2R-x$ 的和 $x + 2R - x = 2R$ 是定值, 根据定理 1 知道, 当 $x = 2R - x$, 即 $x = R$ 时, p 是极大. 这时, 三角形 ABC 是等腰, 因之周长是极大的内接长方形是一个正方形.

解 2 設 $AB = x$, $BC = y$ 是长方形的二边, 那就有

$$2p = 2x + 2y, \text{即 } p = x + y,$$

$$\text{和} \quad x^2 + y^2 = 4R^2.$$

从方程 $x + y = p$, 得到

$$x^2 + y^2 + 2xy = p^2,$$

$$\text{即} \quad p^2 = 4R^2 + 2xy.$$

从这里知道, p^2 同积 xy 同时是极大, 因之也同 x^2y^2 同时是极大, 从而 p 同 x^2y^2 同时是极大. 但是和 $x^2 + y^2$ 是定值, 根据定理 1 知道, 积 x^2y^2 当 $x^2 = y^2$, 即 $x = y$ 时是极大. 这说明周长是极大的内接长方形是正方形.

$$\text{由} \quad x = y \text{ 和 } x^2 + y^2 = 4R^2,$$

$$\text{得到} \quad x = y = \sqrt{2}R.$$

現在我們来考虑定理 1 的逆定理. 为此, 我們来建立下面的定理.

定理 2 設二个正变数的积是定值, 那末当这二数相等时, 它们的和是极小.

为要証明这个定理, 我們利用下面的恆等式:

$$4xy = (x + y)^2 - (x - y)^2.$$

若用 a^2 表示二个正变数 x, y 的积的正定值, 那末这个恒等式变成

$$(x+y)^2 = 4a^2 + (x-y)^2.$$

可見 $(x+y)^2$ 的变化状况同 $(x-y)^2$ 的变化状况相同, 就是說同二个变数的差的绝对值的变化状况相同, 而当 $x=y$ 时, $(x-y)^2$ 因之也就是 $(x+y)^2$ 是极小. 但是, 当二个变数是正时, 和 $(x+y)$ 的变化状况同 $(x+y)^2$ 的变化状况相同. 所以和 $(x+y)$ 也当 $x=y$ 时是极小. 这就証明了定理.

例 4 在所有外切于一个給定圓的菱形 (图 6) 中, 求面积是最小的一个.

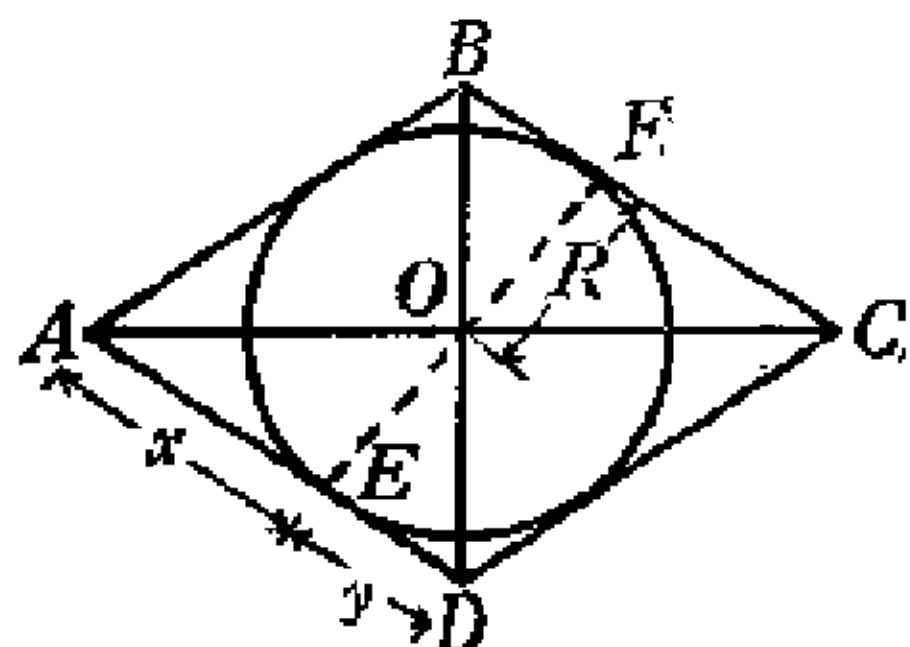


图 6.

解 設 $AE = x, ED = y$.

用 S 表示菱形的面积, 那末有

$$S = AD \times EF = (x+y)2R.$$

由直角三角形 AOD , 得到

$$OE^2 = AE \times ED,$$

即

$$R^2 = xy,$$

因之

$$S = 2R(x + \frac{R^2}{x}).$$

由于积 $x \times \frac{R^2}{x} = R^2$ 是定值; 根据定理 2, 和 $x + \frac{R^2}{x}$ 当 $x = \frac{R^2}{x}$, 即 $x = R$ 时是极小. 这时, $y = R, S = 4R^2$. 所以外切于圓而面积是最小的菱形是一个外切正方形.

例 5 [維維亞尼 (Viviani) 問題] 給定二条平行綫和一条割綫 BC (图 7). 由一条平行綫上的一定点 D , 引一条变的直綫 DA 交割綫 BC 于点 I . 若命 $BI = x, BC = b$; 試問 x

Figure 7.

$$S = AIC + BID = \frac{AC \times IK + BD \times IH}{2}.$$
$$\frac{AC}{BD} = \frac{CI}{BI} = \frac{b-x}{x},$$
$$\text{又} \quad \frac{AC}{BD} = \frac{IK}{IH} = \frac{CI}{BI} = \frac{b-x}{x}.$$

即 $\frac{IK}{d} = \frac{b-x}{b}, \quad \frac{d}{II} = \frac{b}{x}.$

于是 S' 的表达式变成

即
$$S = \frac{ad}{2b} \left(2x + \frac{b^2}{x} - 2b \right).$$

可見面積 S 同 $2x + \frac{b^2}{x}$ 同時是極小，但是積 $2x \cdot \frac{b^2}{x} = 2b^2$ 是定值，由定理 2 知道，和 $2x + \frac{b^2}{x}$ 當 $2x = \frac{b^2}{x}$ ，即 $x = \frac{b\sqrt{2}}{2}$ 時是極小。因之面積 S 也當

$$x = \frac{b\sqrt{2}}{2}$$

時是極小，而極小面積是

$$S = ad(\sqrt{2} - 1).$$

四 任意個因子的積的極大問題

前面所講的極值問題，只涉及到二個因子的積的極大問題和二項的和的極小問題。現在要來講任意個因子的積的極大問題，把定理 1 擴充。

首先來建立下面的定理。

定理 3 設 x, y, z, \dots, u 是 m 個正變數，如果它們的和是定值，那末它們的積當 m 個因子都相等時是極大①。

這個定理是定理 1 的推廣，不過應該注意，前邊曾經指出，定理 1 的二因子不必要限制是正的，但當擴充到 $m > 2$ 個因子時，必須假設這 m 個因子都是正的。

為了證明這定理②，我們依據下面的事實，它是上一節引

① 注意，必須這些因子能相等。對於下面的定理 4, 7, 8，也是這樣。參閱第 10 頁的腳注。

② 這個定理有多種證明。這裏所採用的是古爾薩 (Goursat) 給出的，見法國的《數學新年刊》(Nouvelles Annales de Mathématiques) 1887 年九月號。

理的直接推論。

推論 和是定值的二个正变数的积当二数的差的绝对值变小时增大。

現在来証明定理。設 m 个正变数 x, y, z, \dots, u 的和的定值是 a ：

$$x + y + z + \dots + u = a.$$

用 α 来表示这 m 个变数的算术平均, 就是說

$$\alpha = \frac{x + y + z + \dots + u}{m} = \frac{a}{m},$$

因之 $m\alpha = a$ 。由于只限制这 m 个正变数的和是定值 $m\alpha$, 我們可令每个变数都取值 α ; 于是这 m 个变数的积就取值 α^m 。定理所要求的就是証明: 当 m 个变数的和是 $m\alpha$ 时, 給这 m 个变数以任何別一組正值, 就是說不是使每个变数都取值 α , 积

$$P = xyz \dots u$$

的对应值都小于 α^m 。

事实上, 由于 m 个正因子的和是定值 $m\alpha$, 如果所有这些因子不是都等于 α , 那末至少必有一个小于 α , 一个大于 α 。由于必要时可以把因子的次序顛倒, 我們可以假設, 第一个因子小于 α , 設是 $x = \alpha - h$; 第二个因子大于 α , 設是 $y = \alpha + h$, 其中 h 和 h 都是正数。現在在积

$$P = xyz \dots u$$

中, 用 $x' = \alpha$ 代 $x = \alpha - h$, 用 $y' = \alpha + h - h$ 代 $y = \alpha + h$, 而其余的因子仍旧不改, 那末由于

$$x' + y' = x + y,$$

我們并不改变 m 个因子的和。这样，我們得到一个新的积

$$P' = x'y'z \cdots u.$$

它有下面三点特性：

1. 这积 P' 的所有因子都是正的，所有这些因子的和等于 a 。

2. 这积 P' 大于积 P 。事实上，正因子 x', y' 的差的绝对值是 $k - h$ 的绝对值，而正因子 x, y 的差的绝对值是 $h + k$ ，因之正因子 x', y' 的差的绝对值小于正因子 x, y 的差的绝对值；又因为

$$x' + y' = x + y;$$

所以根据引理的推理，得

$$x'y' > xy.$$

这样，我們看見，在积 P 中，把积是正的二因子用积是較大的另外二因子来代，而其余 $m - 2$ 个正因子仍旧不变，所得的新的积

$$P' > P. \quad (1)$$

在上面的推理中，我們得到了这样的結果，在积

$$P = xyz \cdots u$$

中把部分乘积 xy 用較大的乘积 $x'y'$ 来代以后所得的积

$$P' = x'y'z \cdots u$$

大于积 P 。應該指出，如果不限制所有因子都是正的，这个結果可能是不正确的。譬如在积

$$(-2)(-9)(-10) = -180$$

中把部分乘积 $(-2)(-9)$ 用較大的乘积 $(-4)(-7)$ 来代以后

所得的积

$$(-4)(-7)(-10) = -280,$$

是小于而不是大于原来的积，这说明所有因子都是正的这个假设是必要的。

3. 积 P' 的所有因子中，不等于 α 的因子的个数，看 h 是不等于或等于 h ，而比积 P 的不等于 α 的因子的个数少 1 或 2。如 P' 的所有因子都等于 α ，那末

$$P' = \alpha^m,$$

而由不等式 (1)，便得到

$$P < \alpha^m;$$

如果不是这样，那末对于积 P' 施以对于积 P 所施的运算，并且在必要时，继续这样做，最后必定得到一个积，它的 m 个因子都等于 α ，从而这积等于 α^m 。由于每次所得新的积都比前一个积大，最后所得的积必定大于最初的积 P ，就是说

$$P < \alpha^m$$

定理证毕。

在定理 3 中，我们假定和 $x + y + z + \cdots + u$ 是定值，现在要更一般的，假定 $Ax + By + Cz + \cdots + Lu$ 是定值，这样，便得到定理 3 的一个推广如下：

定理 4 设正变数 x, y, z, \cdots, u 满足线性方程

$$Ax + By + Cz + \cdots + Lu = a,$$

其中系数 A, B, C, \cdots, L 以及 a 都是给定的正常数，那末积

$$P = xyz \cdots u$$

当 $Ax = By = Cz = \cdots = Lu$ 时是极大。

事实上,我們有

$$P = xyz \cdots u = \frac{(Ax)(By)(Cz) \cdots (Lx)}{ABC \cdots L}.$$

可見積 P 同積 $(Ax)(By)(Cz)\cdots(Lt)$ 同時是極大，但是若

$$x' = Ax, y' = By, z' = Cz, \dots, u' = Lu,$$

那末和 $x' + y' + z' + \cdots + w' = a$

是定值, 因之根据定理 3, 积 $x'y'z'\cdots w'$ 当

$$x' = y' = z' = \dots = q'$$

时是极大,也就是积 $(Ax)(By)(Cz)\cdots(Lu)$ 当

$$Ax + By = Cz + \cdots = Lu$$

时是极大;从而积 P 也当这时是极大,这就证明了定理.

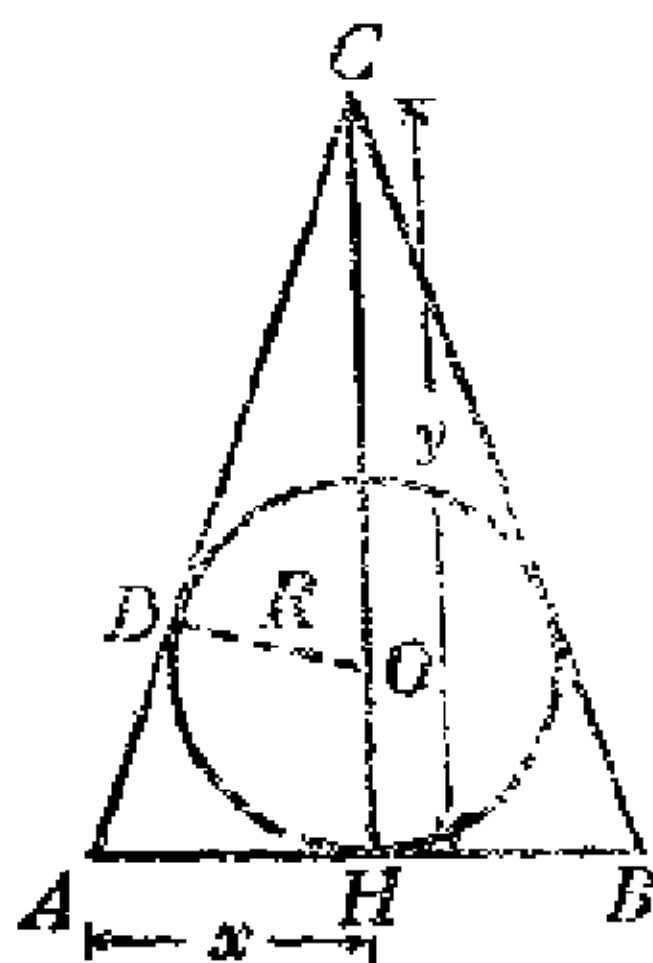


图 8.

例6 在半径是 R 的球的所有外切圆锥中,求全面积是最小的一个。

解 設 x 是圓錐的底半徑 (圖 8), h 是它的高, S 是它的全面積, 那末有

$$S = \pi x^2 + \pi x \times AC$$

$$= \pi x^2 + \pi x(CD + x)$$

相似三角形 CAH 和 COD 給出

$$\frac{OD}{R} = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{(OD+x)^2 - x^2}}{x} = \frac{\sqrt{OD(OD+2x)}}{x},$$

由此

$$x^2 \cdot OD = R^2 (OD + 2x),$$

因之

$$OD = \frac{2R^2x}{x^2 - R^2}.$$

把 OD 的这个值代入全面积 S 的表达式中, 得到

$$S = \pi x \left(x + x + \frac{2R^2x}{x^2 - R^2} \right) = \frac{2\pi x^2}{x^2 - R^2}.$$

为了确定 S 的最小值, 我們确定它的倒数的最大值, 从上式得

$$\frac{2\pi}{S} = \frac{x^2 - R^2}{x^2} = \frac{1}{x^2} \left(1 - \frac{R^2}{x^2} \right),$$

两边乘以常数 R^2 , 得

$$\frac{2\pi R^2}{S} = \frac{R^2}{x^2} \left(1 - \frac{R^2}{x^2} \right).$$

由于和

$$\frac{R^2}{x^2} + \left(1 - \frac{R^2}{x^2} \right) = 1$$

是定值, 由定理 3 知道, 积 $\frac{R^2}{x^2} \left(1 - \frac{R^2}{x^2} \right)$ 当

$$\frac{R^2}{x^2} = 1 - \frac{R^2}{x^2}$$

时是极大. 由此得到

$$x = R\sqrt{2},$$

而最小面积是

$$S = \frac{2\pi \cdot 4R^2}{R^2} = 8\pi R^2.$$

例 7 在同周长的所有三角形中, 求面积是最大的一个.

解 設 $2p$ 是三角形的周长, x, y, z 是它的边长, 而 S 是它的面积, 那末有

$$S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}.$$

由于 p 是定值, 面积 S 显然同积

$$P = (p-x)(p-y)(p-z)$$

同时是极大。但是，这个积的三个因子都是正的，并且它们的和

$$p-x+p-y+p-z=3p-(x+y+z)=3p-2p=p$$

是定值，所以根据定理 3 知道，当

$$p-x=p-y=p-z$$

时，即 $x=y=z=\frac{2p}{3}$ 时，积 P 是极大，这说明所有同周长的三角形中，等边三角形的面积最大。

例 8 从一张边长是 $2a$ 和 $2b$ 的长方形铁皮的各角上截去相等的方块(图 9)，把余下的部分做成无盖的匣子。试问

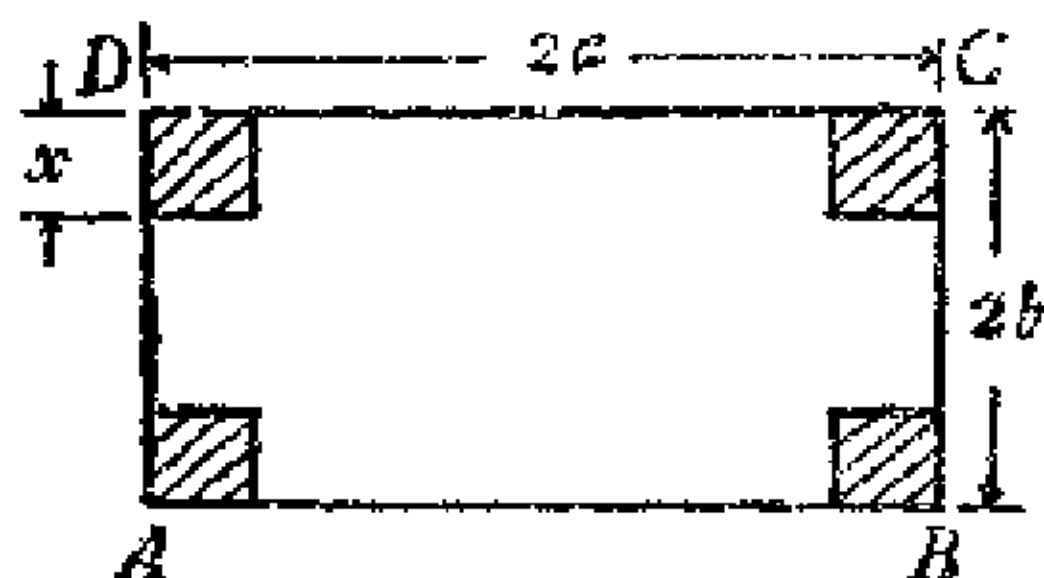


图 9.

截去的方块的边长要怎样才能得出最大容积的匣子？

解 设 x 是截去的方块的边长。匣子的底是一个长方形，它的边长是 $2a-2x$ 和 $2b-2x$ 。所以匣子的容积是

$$V=4x(a-x)(b-x).$$

问题就是求 V 的最大值。

由容积 V 的表达式可见， V 同积 $2x(a-x)(b-x)$ 同时是极大。应该注意，这里的三因子 $2x$ ， $a-x$ ， $b-x$ 的和虽然是定值 $a+b$ ，但是不能相等，因为若

$$2x=a-x=b-x,$$

那就有 $a=b$ 。这不是所考虑的情形，因为所取的铁皮是长方形而不是正方形。因此，得想别的办法。我们姑且用待定系数法。

乘 V 的表达式的后二因子以 m 和 n , 就有

$$x(ma - mx)(nb - nx),$$

这积的三因子的和是

$$x + ma - mx + nb - nx = ma + nb + x(1 - m - n),$$

如果

$$1 - m - n = 0, \quad (2)$$

这个和就将是定值, 无关于 x . 这时, 当三因子相等时, 就是說

$$x = m(a - x) = n(b - x),$$

从而

$$m = \frac{x}{a - x}, \quad n = \frac{x}{b - x},$$

积就是极大. 把 m 和 n 的值代入式(2)中, 就得

$$1 - \frac{x}{a - x} - \frac{x}{b - x} = 0,$$

即

$$3x^2 - 2(a + b)x + ab = 0,$$

由此得

$$x = \frac{a + b \pm \sqrt{a^2 + b^2 - ab}}{3}. \quad (3)$$

为使方程(3)的一根是問題的一解, 必須它是实的, 正的, 而且小于 b (我們假定 $b < a$). 实的条件显然恆满足, 而且二根也恆是正的. 最后, 若設

$$f(x) = 3x^2 - 2(a + b)x + ab,$$

那末由于 $f(b) = b(b - a) < 0$, 可知 b 是在二根之間, 而大根大于 b . 因此, 只有小根

$$x = \frac{a + b - \sqrt{a^2 + b^2 - ab}}{3}$$

适合于問題, 而使容积 V 的对应值是极大.

順便指出, 如果在特別的情形下, 所取的鉄皮是正方形

的, 就是 $a=b$. 那末三因子 $2x, a-x, b-x$ 可以相等, 而得 $x = \frac{a}{3}$.

例 9 在四坐标面做三个面而且一个顶点是在平面

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (\text{其中 } a, b, c \text{ 都是正常数})$$

上①的所有长方体中, 求容积是最大的一个.

解 設所考虑的长方体的容积是

$$V = xyz.$$

由于 x, y, z 满足关系

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

根据定理 4 知道, 容积 V 当

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

时是极大. 由此得

$$x = \frac{a}{3}, \quad y = \frac{b}{3}, \quad z = \frac{c}{3},$$

而最大容积是 $\frac{abc}{27}$.

現在我們来看定理 3 的另一个推广. 为简单明确起见, 我們只就三变数的情形来立論, 不过所得結果对于任意个变数的情形仍是正确的. 我們要建立的是下面的定理.

定理 5 如果正变数 x, y, z 的和是定值, 那末积 $x^m y^n z^p$ 当变数 x, y, z 同指数 m, n, p 成比例时是极大②, 其中 m, n, p

① 根据解析几何, 线性方程 $Ax + By + Cz + D = 0$ 表示一平面, 其中 A, B, C, D 都是常数.

② 注意, 必须 x, y, z 能同 m, n, p 成比例. 对于下面的定理 6, 9, 10, 也是这样. 参阅第 16 頁的脚注.

是給定的正有理数。

先設 m, n, p 是正整数。設

$$P = x^m y^n z^p,$$

其中正变数 x, y, z 的和是定值 a ;

$$x + y + z = a.$$

积 P 同积

$$P' = \frac{x^m y^n z^p}{m^m n^n p^p} = \left(\frac{x}{m}\right)^m \left(\frac{y}{n}\right)^n \left(\frac{z}{p}\right)^p$$

同时是极大。但 P' 是 $m + n + p$ 个正因子的积，而这些因子的和

$$m \cdot \frac{x}{m} + n \cdot \frac{y}{n} + p \cdot \frac{z}{p} = x + y + z = a$$

是定值；因此，根据定理 3，这积 P' 当

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p}$$

时是极大，从而积 P 也当这时是极大。由此得到

$$x = \frac{ma}{m+n+p}, \quad y = \frac{na}{m+n+p}, \quad z = \frac{pa}{m+n+p}.$$

現在来考虑 m, n, p 是正分数的情形。在这里，我們把 m, n, p 变成有最小公分母 D ：

$$m = \frac{m'}{D}, \quad n = \frac{n'}{D}, \quad p = \frac{p'}{D}.$$

于是可把积 P 写成

$$P = x^m y^n z^p = x^{\frac{m'}{D}} y^{\frac{n'}{D}} z^{\frac{p'}{D}} = \sqrt[D]{x^{m'} y^{n'} z^{p'}}.$$

可見得积 P 同积 $x^{m'} y^{n'} z^{p'}$ 同时是极大。但是上边已經証明积 $x^{m'} y^{n'} z^{p'}$ 当

$$\frac{x}{m'} = \frac{y}{n'} = \frac{z}{p'}$$

时,即

$$\frac{x}{mD} = \frac{y}{nD} = \frac{z}{pD}$$

时,也即

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p}$$

时是极大. 从而积 P 也当这时是极大. 定理证毕.

我們可以把定理 5 推广如下.

定理 6 設正变数 x, y, z 满足綫性方程

$$Ax + By + Cz = a,$$

其中 A, B, C 以及 a 都是給定的正常数, 那末积

$$P = x^m y^n z^p$$

当

$$\frac{Ax}{m} = \frac{By}{n} = \frac{Cz}{p}$$

时是极大, 其中 m, n, p 是正有理数.

事实上, 我們有

$$\begin{aligned} P &= x^m y^n z^p = \left(\frac{Ax}{A}\right)^m \left(\frac{By}{B}\right)^n \left(\frac{Cz}{C}\right)^p \\ &= \frac{(Ax)^m (By)^n (Cz)^p}{A^m B^n C^p} \end{aligned}$$

可見积 P 同积 $(Ax)^m (By)^n (Cz)^p$ 同时是极大. 但是若命

$$x' = Ax, \quad y' = By, \quad z' = Cz,$$

那末和

$$x' + y' + z' = a$$

是定值, 因之由定理 5 知道, 当

$$\frac{x'}{m} = \frac{y'}{n} = \frac{z'}{p}$$

时, 即当

$$\frac{Ax}{m} = \frac{By}{n} = \frac{Cz}{p}$$

时, 积 $x^m y^n z^p : (Ax)^m (By)^n (Cz)^p$ 是极大; 从而积 P 也当这时是极大. 定理证毕.

例 10 在内接于半径是 R 的球的所有圆柱中, 求容积是最大的一个.

解 取经过球心而垂直于圆柱的底的面做为作图平面, 这平面交球于一大圆, 而交圆柱于一长方形 $ABCD$ (图 10). 设圆柱的底的半径 AH 的长是 x , 而球心到底面 AB 的距离 OH 的长是 y ; 因此圆柱的高是 $2y$.

圆柱的容积是

$$V = 2\pi x^2 y.$$

另外一方面, 由直角三角形 OHA 得到

$$\overline{AH}^2 + \overline{HO}^2 = \overline{OA}^2,$$

即

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

由此

$$y^2 = R^2 - x^2.$$

从而圆柱的容积是

$$V = 2\pi x^2 \sqrt{R^2 - x^2}.$$

可见容积 V 是同积 $x^2 \sqrt{R^2 - x^2}$ 同时是极大, 因之也同积 $x^4 (R^2 - x^2)$ 同时是极大. 由于

$$x^4 (R^2 - x^2) = (x^2)^2 (R^2 - x^2),$$

而 x^2 和 $R^2 - x^2$ 的和是定值 R^2 , 由定理 5 知道, 积 $x^4 (R^2 - x^2)$ 当

$$\frac{x^2}{2} = R^2 - x^2,$$

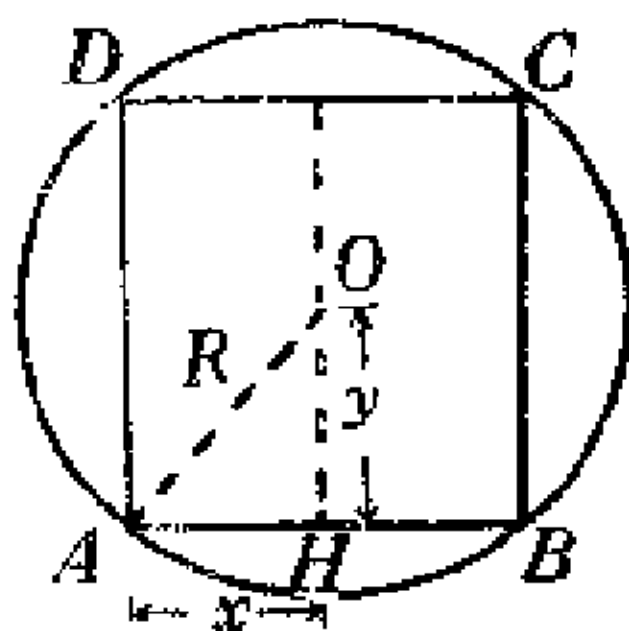


图 10.

即

$$x^2 = \frac{2R^2}{3}$$

也即

$$x = R\sqrt{\frac{2}{3}}$$

时是极大，从而容积 V 也当这时是极大。

这时的 y 是

$$y = \frac{R\sqrt{3}}{3}.$$

例 II 从侧面积同是 πa^2 的所有圆锥中，求容积是最大的一个。

解 设 x 是圆锥的底半径， y 是它的高，而 V 是它的容积，我们有

$$\pi a^2 = \pi x \sqrt{x^2 + y^2}, \quad V = \frac{\pi}{3} x^2 y.$$

第一方程给出

$$a^4 = x^4 + x^2 y^2,$$

由此

$$y^2 = \frac{a^4 - x^4}{x^2};$$

于是由容积 V 的表达式得

$$V^2 = \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 x^4 \left(-\frac{a^4 - x^4}{x^2}\right) = \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 x^2 (a^4 - x^4).$$

可见容积 V 同积 $x^2(a^4 - x^4)$ 即 $(x^4)^{\frac{1}{2}}(a^4 - x^4)$ 同时是极大，而和

$$x^4 + a^4 - x^4 = a^4$$

是定值，所以容积 V 当

$$-\frac{x^4}{\frac{1}{2}} = \frac{a^4 - x^4}{1}$$

时,即

$$x^2 = \frac{a^2}{\sqrt{3}}, \quad y^2 = \frac{2a^2}{\sqrt{3}}$$

时是极大.

順便指出,并不必定要取 V 的平方. 事实上,我們有

$$V = \frac{\pi}{3} x^2 y = \frac{\pi}{3} x^2 \frac{\sqrt{a^4 - x^4}}{x} = \frac{\pi}{3} x \sqrt{a^4 - x^4},$$

由于

$$x \sqrt{a^4 - x^4} = (x^4)^{\frac{1}{4}} (a^4 - x^4)^{\frac{1}{2}},$$

而和

$$x^4 + a^4 - x^4 = a^4$$

是定值,所以容积 V 当

$$\frac{x^4}{\frac{1}{4}} = \frac{a^4 - x^4}{\frac{1}{2}}$$

时,即

$$x^2 = \frac{a^2}{\sqrt{3}}$$

时是极大.

例 12 設 $2x + 3y + 4z = a$.

其中 a 是一給定的正常数;試求积 $x^2 y^3 z^4$ 的最大值①.

解 根据定理 6 知道,积 $x^2 y^3 z^4$ 当

$$\frac{2x}{2} = \frac{3y}{3} = \frac{4z}{4}$$

时,即

$$x = y = z$$

时是极大. 由此得

$$x = \frac{a}{9}, \quad y = \frac{a}{9}, \quad z = \frac{a}{9},$$

而积 $x^2 y^3 z^4$ 的最大值是 $\left(\frac{a}{9}\right)^9$.

① 这个题目見吉孙 (G. A. Gibson), *高等微积分* (Advanced Calculus), 第 222 面, 习题 20. 这里很簡捷地解决了.

例 13 設一气体混合物是由一氧化氮和氧所組成，氧的浓度不同，一氧化氮的氧化的速度也不同，試求混合物中当一氧化氮的氧化速度最大时氧的浓度。

解 化学反应 $2\text{NO} + \text{O}_2 = 2\text{NO}_2$ ，在实际上是不可逆的条件下，反应速度 v 可以由下式表示：

$$v = kx^2y, \text{①}$$

其中 x 是某一瞬时一氧化氮 NO 的浓度； y 是氧 O_2 的浓度； k 是反应速度常数，同反应成分的浓度无关，而只同温度有关，气体浓度用体积百分数来表示。

由于 $x + y = 100$ 是定值，所以速度 v 当

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{1}$$

时是极大，由此得 $x = 2y$ ，代入 $x + y = 100$ 中，得

$$y = 33.3\%.$$

至于 x 應該是

$$x = 66.7\%.$$

換句話說，假如气体混合物含有 33.3% 的氧，即氧和一氧化氮的比是 $y:x = 33.3:66.7 = 0.5$ 时，一氧化氮的氧化速度最大。因为反应过程中，这个比維持不变，所以若在开始时混合物含有 33.3% 的氧，那末反应速度在整个过程中都是相对地最大。由于所得結果同反应速度常数 k 无关，这結果对于任何温度下的这一氧化反应都是正确的，只要在这温度下这反应实际上是不可逆的。

① 因为平衡的化学反应方程式中一氧化氮的分子数是 2，所以反应速度 v 跟一氧化氮的浓度的 2 次方成正比。

五 任意多項的和的極小問題

上一節所講的是在一定條件下任意個因子的積的極大問題，現在來談在一定條件下任意多項的和的極小問題，把定理 2 擴充。

定理 7 如果 m 個正變數 x, y, z, \dots, u 的積是定值，那末它們的和當這些數相等時是極小。

事實上，設 α^m 是 m 個正變數 x, y, z, \dots, u 的積 $xyz \dots u$ 的給定的值。考慮 m 個正因子，它們的和是定值 $m\alpha$ ；於是根據定理 3，當這些因子都等於 α 時，它們的積是極大而等於 α^m 。因此，如果 m 個因子的和小于 $m\alpha$ ，那末它們的積將恆小于 α^m 。所以 m 個因子的和不能小于 $m\alpha$ 。又由於這個和能等於 $m\alpha$ ，可知 $m\alpha$ 就是這個和的最小值。另外一方面，當 m 個正因子的和是 $m\alpha$ 時，它們的積只當這 m 個因子都相等時才達到最大值 α^m 。因此，積是定值的 m 個正因子的和當這些因子都相等時是極小。定理證畢。

定理 7 可推廣如下。

定理 8 如果 m 個正變數 x, y, z, \dots, u 的積是定值 k ，即 $xyz \dots u = k$ ，那末和 $Ax + By + Cz + \dots + Lu$ 當 $Ax = By = Cz = \dots = Lu$ 時是極小，其中 A, B, C, \dots, L 以及 k 都是給定的正常數。

事實上，設

$$x' = Ax, y' = By, z' = Cz, \dots, u' = Lu,$$

那末積 $x'y'z' \dots u'$ 是定值：

$$x'y'z'\cdots u' = (ABC\cdots L)xyz\cdots u = (ABC\cdots L)h.$$

因之由定理 7, 和 $x' + y' + z' + \cdots + u'$ 当 $x' = y' = z' = \cdots = u'$ 时是极小; 从而和 $Ax + By + Cz + \cdots + Lu$ 当 $Ax = By = Cz = \cdots = Lu$ 时是极小. 这就证明了定理.

例 14 在一给定圆的所有外切等腰梯形中, 求面积是最小的一个.

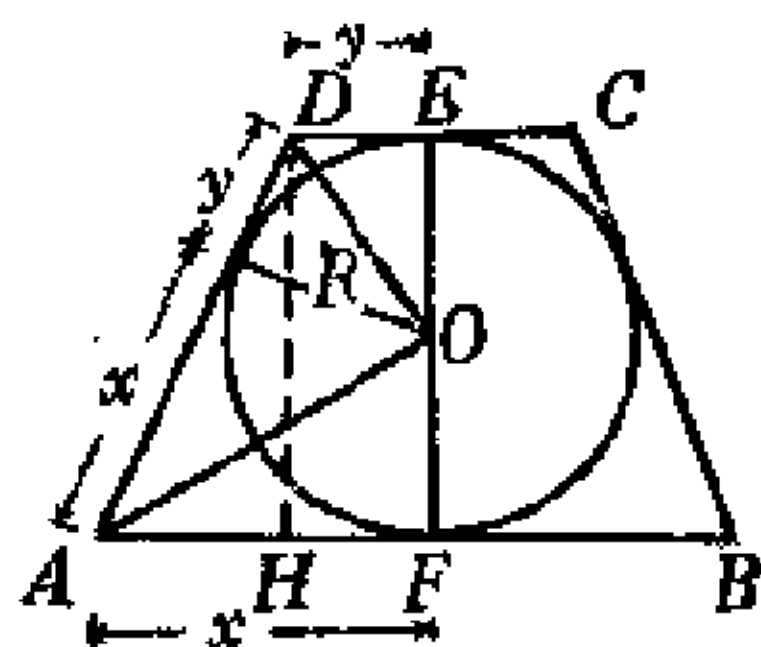


图 11.

解 设 x, y 分别是梯形的底的一半, $2R$ 是它的高, 于是它的面积是

$$S = 2R(x + y).$$

在 x, y 和 R 之间, 我们有关系

$$xy = R^2. \text{ 因为梯形的角 } A \text{ 和 } D \text{ 是}$$

互补的, 它们的半角是互余的, 因之角 AOD 是直角, 而三角形 AOD 是直角三角形. 又由三角形 ADH 也可以得到这个关系, 因为

$$(x + y)^2 = 4R^2 + (x - y)^2,$$

由此

$$xy = R^2.$$

梯形的面积 S 同 $x + y$ 同时是极小; 但是积 xy 是定值 R^2 , 所以和 $x + y$, 因之面积 S 当 $x = y = R$ 时是极小; 这就是说, 当梯形是圆的外切正方形时, 它的面积 S 是极小. 这极小面积是 $4R^2$.

例 15 在唧筒压缩器内压缩某一气体, 从大气压力 p_0 增到压力 $p > p_0$. 这时压缩 1 公斤气体所耗费的功 W 用下式表示:

$$W = RT_0 \frac{\gamma}{\gamma-1} \left[\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right];$$

其中 R 是气体常数, T_0 是气体在压缩前的绝对温度, 而 γ 是同压缩机构造有关的某一常数 (>1). 显然, 原始温度越小, 所费的功 W 也越小; 压缩越多, 所费的功也就越大. 因此, 要达到高度压缩时, 怎样节省所费的功就成为一个重要的问题. 我们可以把全部压缩过程分成几个阶段, 而在每个阶段之间使被压缩的 (同时也在发热的) 气体冷却.

例如, 设有三个阶段的压缩机, 附有两个中间冷却器, 在冷却器里温度仍还原到 T_0 . 若用 p_1 和 p_2 表示在第一和第二阶段末的压力, 那末压缩所耗费的总功是

$$W = RT_0 \frac{\gamma}{\gamma-1} \left\{ \left[\left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] + \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] + \left[\left(\frac{p}{p_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] \right\}.$$

于是就引起这样的问题: 当给定 p_0, p, T_0 时, 应该怎样选择中间压力 p_1 和 p_2 , 才使所耗费的总功是最小.

由总功 W 的表达式, 可见总功 W 同函数

$$u = \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \left(\frac{p}{p_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

同时是极小. 但是积

$$\left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \cdot \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \cdot \left(\frac{p}{p_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

是定值, 据根定理 7 知道, 当

$$\left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{p}{p_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

时,即

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{p}{p_0}$$

时,函数 u 因之总功 W 是极小. 可见相继的压力应该作成等比数列. 解出 p_1, p_2 , 得到

$$p_1 = \sqrt[3]{p_0^2 \cdot p}, \quad p_2 = \sqrt[3]{p_0 \cdot p^2}.$$

例 16 圆柱形线圈的电时间常数①近似地是

$$t = \frac{mxyz}{ax + by + cz}$$

其中 x 是平均半径, y 是内外半径的差, z 是轴长, 而 m, a, b, c 都是已知常数; 线圈的体积是 $nxyz$, 其中 n 是一常数. 现在设这体积 $nxyz$ 是定值, 试求电时间常数的最大值.

解 设 V 是线圈的体积, 那末有

$$nxyz = V.$$

由此, 积

$$xyz = \frac{V}{n}$$

是定值.

因此, 时间常数 t 当分母 $ax + by + cz$ 是最小时取到最大值. 但是因为积 xyz 是定值, 和 $ax + by + cz$ 当

$$ax = by = cz$$

时是极小. 由此得

① 一个线圈接在一个电路里, 如果电路的总电阻是 R , 供给电流的电池的电动势是 E , 根据欧姆定律, 电流应该等于 $\frac{E}{R}$, 用 I_0 表示. 但由于线圈有自感现象, 当电路突然接通时, 由自感产生的电动势的方向和电流的方向相反, 因此电流的增大比较缓慢. 从理论上说, 只有经过时间 $t = \infty$ 时, 电流才能达到 I_0 值. 而 $t = \frac{L}{R}$ 时 (这里 L 是线圈的自感系数), 电流可以达到 I_0 的 $(1 - \frac{1}{e})$ 倍, 即 63.2%. 这一时间叫做电路的时间常数.

$$x = \frac{1}{a} \sqrt[n]{\frac{abcV}{n}}, \quad y = \frac{1}{b} \sqrt[n]{\frac{abcV}{n}}, \quad z = \frac{1}{c} \sqrt[n]{\frac{abcV}{n}},$$

而电时间常数 t 的最大值是

$$\frac{mV \sqrt[n]{n}}{3n \sqrt[n]{abcV}}.$$

現在來講定理 7 的另一个推广.

定理 9 如果积 $x^m y^n z^p$ 是定值, 其中 x, y, z 是正变数, 而指数 m, n, p 是給定的正有理数, 那末和 $x + y + z$ 当变数 x, y, z 同指数 m, n, p 成比例时是极小.

$$\text{設} \quad S = x + y + z, \\ x^m y^n z^p = k,$$

其中 k 是給定的正数.

我們可以假定指数 m, n, p 是正整数; 因为如果不是的话, 那末如同証明定理 5 时一样, 可以把 m, n, p 变成有最小公分母, 而使問題轉化做指数是正整数的情形.

我們可以把和 S 写成

$$S = m \frac{x}{m} + n \frac{y}{n} + p \frac{z}{p} \\ = \overbrace{\frac{x}{m} + \frac{x}{m} + \dots + \frac{x}{m}}^{m \text{ 項}} + \overbrace{\frac{y}{n} + \frac{y}{n} + \dots + \frac{y}{n}}^{n \text{ 項}} + \overbrace{\frac{z}{p} + \frac{z}{p} + \dots + \frac{z}{p}}^{p \text{ 項}},$$

于是和 S 成为 $m + n + p$ 个正項的和; 这些項的积

$$\overbrace{\frac{x}{m} \cdot \frac{x}{m} \dots \frac{x}{m}}^{m \text{ 个}} \cdot \overbrace{\frac{y}{n} \cdot \frac{y}{n} \dots \frac{y}{n}}^{n \text{ 个}} \cdot \overbrace{\frac{z}{p} \cdot \frac{z}{p} \dots \frac{z}{p}}^{p \text{ 个}} \\ = \left(\frac{x}{m} \right)^m \cdot \left(\frac{y}{n} \right)^n \cdot \left(\frac{z}{p} \right)^p$$

是定值, 等于 $\frac{k}{m^m n^n p^p}$. 因此, 根据定理 7 知道, 和 S 当

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p}$$

时是极小. 这就证明了定理.

应该指出, 定理 9 对于任意个正变数的情形仍是正确的, 定理 9 可以推广如下.

定理 10 设积 $x^m y^n z^p$ 是定值 k , 即 $x^m y^n z^p = k$, 其中 x, y, z 是正变数, 而指数 m, n, p 是给定的正有理数, 那末和 $Ax + By + Cz$ 当

$$\frac{Ax}{m} = \frac{By}{n} = \frac{Cz}{p}$$

时是极小, 其中 A, B, C 都是正常数.

事实上, 设

$$x' = Ax, \quad y' = By, \quad z' = Cz,$$

那末积 $x'^m y'^n z'^p$ 是定值:

$$x'^m y'^n z'^p = (A^m B^n C^p) k,$$

因之根据定理 9 知道, 和 $x' + y' + z'$ 当

$$\frac{x'}{m} = \frac{y'}{n} = \frac{z'}{p}$$

时是极小, 也就是和 $Ax + By + Cz$ 当

$$\frac{Ax}{m} = \frac{By}{n} = \frac{Cz}{p}$$

时是极小, 定理成立.

例 17 在容积同是 $\frac{\pi a^3}{3}$ 的所有圆锥中, 求侧面积是最小的一个.

解 设 x 是圆锥的底的半径, y 是它的高, S 是它的侧面

积,那末有

$$\frac{\pi a^3}{3} = \frac{\pi x^2 y}{3}, \quad S = \pi x \sqrt{x^2 + y^2}.$$

第一方程给出

$$y = \frac{a^3}{x^2},$$

因之侧面积 S 的表达式变成

$$S = \pi x \sqrt{x^2 + \frac{a^6}{x^4}} = \pi \sqrt{x^4 + \frac{a^6}{x^2}}.$$

可见面积 S 同和 $x^4 + \frac{a^6}{x^2}$ 同时是极小。但是积

$$(x^4)^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{a^6}{x^2} = a^6$$

是定值;根据定理 9 知道,和 $x^4 + \frac{a^6}{x^2}$ 当

$$\frac{x^4}{\frac{1}{2}} = \frac{a^6}{x^2}$$

时,即

$$x = \frac{a}{\sqrt[3]{2}}$$

时是极小;因之面积 S 也当这时是极小。这时的 y 应该是 $y = \sqrt[3]{2} a$ 。

例 18 在容积同是 πa^3 的所有圆柱中,求全面积是最小的一个。

解 设 x 是圆柱的半径, y 是它的高, S 是它的全面积,那末有

$$\pi a^3 = \pi x^2 y, \quad S = 2\pi x^2 + 2\pi xy = 2\pi(x^2 + xy).$$

第一方程给出

$$xy = \frac{a^3}{x},$$

因之面积 S 的表达式变成

$$S = 2\pi \left(x^2 + \frac{a^3}{x} \right).$$

可見面积 S 同和 $x^2 + \frac{a^3}{x}$ 同时是极小。但是积

$$(x^2) \left(\frac{a^3}{x} \right)^2 = a^6$$

是定值；根据定理 9 知道，和 $x^2 + \frac{a^3}{x}$ 因之面积 S 当

$$\frac{x^2}{1} = -\frac{\frac{a^3}{x}}{2}$$

时，即

$$x = \frac{a}{\sqrt[3]{2}}$$

时是极小。这时的 y 應該是 $y = \frac{2a}{\sqrt[3]{2}} = 2x$ 。这說明全面积 S 是最小的圆柱的高等于它的底的直径。

如把面积 S 的表达式写成

$$S = 2\pi \left(\frac{x^3 + a^3}{x} \right),$$

也可以求出面积 S 是最小的圆柱。事实上，由这式可見，面积 S 的最小值同 $\frac{x^3 + a^3}{x}$ 的倒数 $\frac{x}{x^3 + a^3}$ 的最大值同时出現，因之也同这倒数的立方 $\frac{x^3}{(x^3 + a^3)^3}$ 的最大值同时出現。但是

$$\frac{x^3}{(x^3 + a^3)^3} = \left(\frac{x^3}{x^3 + a^3} \right) \left(\frac{a^3}{x^3 + a^3} \right)^2 \frac{1}{a^6},$$

而和

$$\frac{a^3}{x^3 + a^3} + \frac{a^3}{x^3 + a^3} = 1$$

是定值；根据定理 5 知道， $\frac{x^3}{(x^3+a^3)^{\frac{2}{3}}}$ 当

$$\frac{\frac{x^3}{x^3+a^3}}{1} = -\frac{\frac{a^3}{x^3+a^3}}{\frac{2}{3}}$$

时是极大。由此得 $x = \sqrt[3]{\frac{a}{2}}$ 。这就是上面所得的结果。

例 19 设计制造一无盖的水柜，它的底是正方形，侧面是竖直的，容积是定值，内部涂上一层一定厚度的铅。试问这柜的深度和宽度应该怎样，才使所费的铅是最少？

解 设 x 是所要制造的水柜的宽度， y 是它的深度， V 是它的容积，那末有

$$V = x^2 y = a,$$

其中 a 是一给定的常数。

若用 S 表示水柜内部的面积，那末有

$$S = x^2 + 4xy,$$

问题就是求面积 S 的最小值。

由容积 V 的表达式，得

$$V^2 = x^2 \cdot x^2 y^2 = a^2,$$

命

$$x' = x^2, \quad y' = xy,$$

那末积

$$x' y'^2 = a^2$$

是定值，而面积 S 的表达式变成

$$S = x' + 4y'.$$

于是根据定理 10 知道，面积 S ，也就是和 $x' + 4y'$ ，当

$$\frac{x'}{1} = \frac{4y'}{2}$$

时是极小。由此得

$$x' = 2y',$$

即

$$x^2 = 2xy.$$

显然 $x \neq 0$, 由此得

$$y = \frac{x}{2}.$$

这说明最省铅的制造法是水柜的深度等于它的宽度的一半。

六 极大极小问题的互逆性

在以上所讲的这些条定理中,譬如定理 7 和定理 9 分别是定理 3 和定理 5 的逆定理。一般的,在一定条件下,关于极大的一条定理,总有关于极小的一条定理相对应。这个互逆性可用下面的定理来表达。

定理 II 设 $f(x, y, z), \phi(x, y, z)$ 是变数 x, y, z 的二个函数, A 是一个给定的数;若当 x, y, z 在条件

$$f(x, y, z) = A$$

之下时, $\phi(x, y, z)$ 有一最大值, 设是 $\phi(a, b, c) = B$ (当然, B 依赖于 A), 而且当 A 增大时, 对应的 B 也增大, 那末当 x, y, z 在条件

$$\phi(x, y, z) = B$$

之下时, $f(x, y, z)$ 就有一最小值 $f(a, b, c) = A$ 。

事实上, 设变数 x, y, z 满足条件

$$\phi(x, y, z) = B, \quad (4)$$

那末在函数 $f(x, y, z)$ 所取到的一切值中, 必有值 A , 因为依假设 $\phi(a, b, c) = B, f(a, b, c) = A$ 。但是 $f(x, y, z)$ 必不能取

到小于 A 的值。实际上,設 A' 小于 A , 那末 x, y, z 在条件

$$f(x, y, z) = A' \quad (5)$$

之下时,依假設,函数 $\phi(x, y, z)$ 的对应的最大值設是 B' 必小于 B ; 因此,滿足条件(5)的 x, y, z 的值必不滿足条件(4); 所以在条件(4)之下, $f(x, y, z)$ 必不能取到小于 A 的值。因此,在条件(4)之下,函数 $f(x, y, z)$ 的值不能小于 A ; 又因为在条件(4)之下,函数 $f(x, y, z)$ 能取到值 A , 所以在条件(4)之下,函数 $f(x, y, z)$ 的最小值是 A 。定理証毕。

例 20 在同面积的所有长方体中,求容积是最大的一个。反过来,在同容积的所有长方体中,求面积是最小的一个。

解 設 $2S$ 是所考虑的所有长方体的共同面积, x, y, z 是其中任一个的长、宽、高,那末有

$$2S = 2xy + 2xz + 2yz,$$

由此

$$xy + xz + yz = S.$$

設 V 是长方体的容积,那末有

$$V = xyz,$$

可見这容积 V 是同 $x^2y^2z^2$ 同时是极大。但是

$$x^2y^2z^2 = xy \cdot xz \cdot yz,$$

而且三个正因子 xy, xz, yz 的和是定值 S , 因此,积 $xy \cdot xz \cdot yz$, 也就是 $x^2y^2z^2$, 当这些因子相等时是极大,就是說当

$$xy = xz = yz = \frac{S}{3}$$

时,这积是极大。由此得

$$x = y = z = \sqrt{\frac{S}{3}},$$

而积 $xy \cdot xz \cdot yz$ 的最大值是 $\frac{S^3}{27}$. 当 S 增大时, 这极大值也增大. 所以反过来, 若这积 $x^2y^2z^2$ 是定值, 那末和 $xy + xz + yz$ 当 $x = y = z$ 时是极小.

由此得下面二个结果:

1. 在同面积的所有长方体中, 立方体的容积最大;
2. 反过来, 在所有同容积的长方体中, 立方体的面积最小.

最后, 为使读者能够更好地了解 and 运用所讲的理论, 我们给出几个简单习题, 给读者自行演解.

习 题

1. 在所有同弦的直角三角形中, 求面积是最大的一个.
2. 在半圆是 R 的圆的所有内接等腰三角形中, 求面积是最大的一个.
3. 设一电灯可以沿着竖直线 OB (图 12) 移动 (例如, 装着滑轮), 试问它同水平面 OA 的距离 h 应该怎样, 才使水平面上的一点 A 处获得最大的亮度?

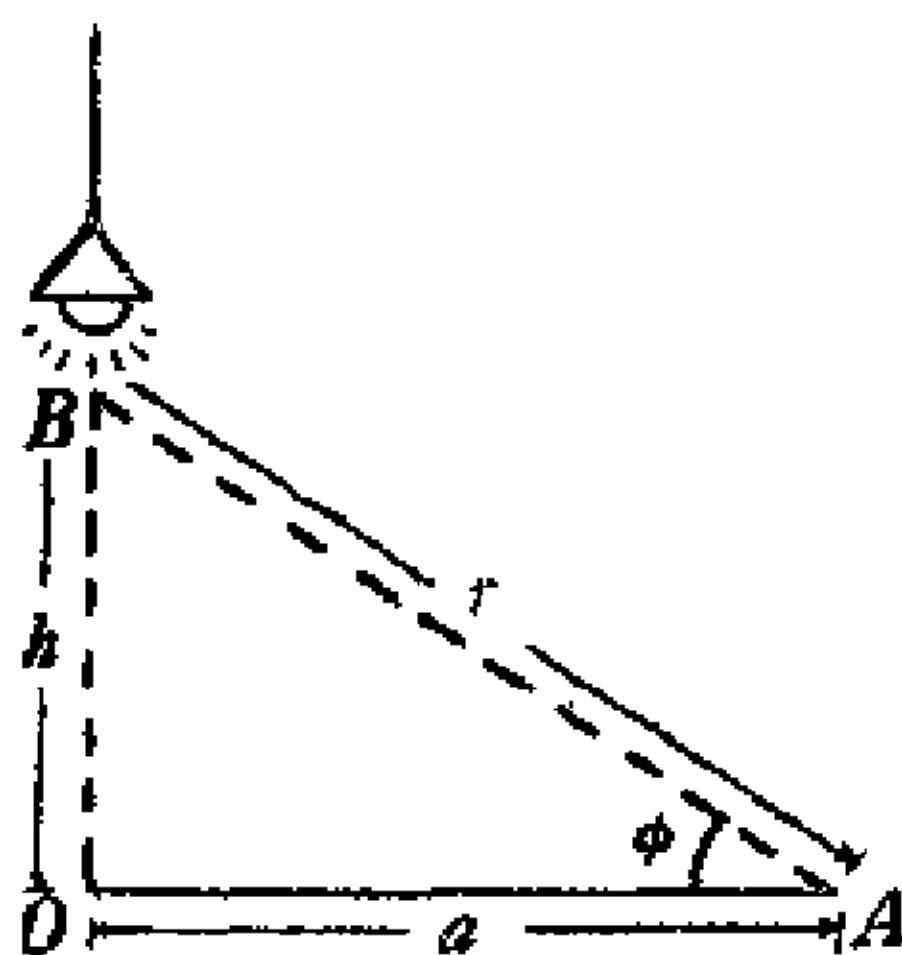


图 12.

得最大的亮度?

4. 设 MN 是给定的一条直线, A, B 是给定的两点, 分别位于 MN 的两侧 (图 13). 求经过两点 A, B 并且在直线 MN 上截最小线段的圆.

5. 在半圆是 R 的一个圆中, 引一条弦 AB 垂直于一条直径 CD (图 14),

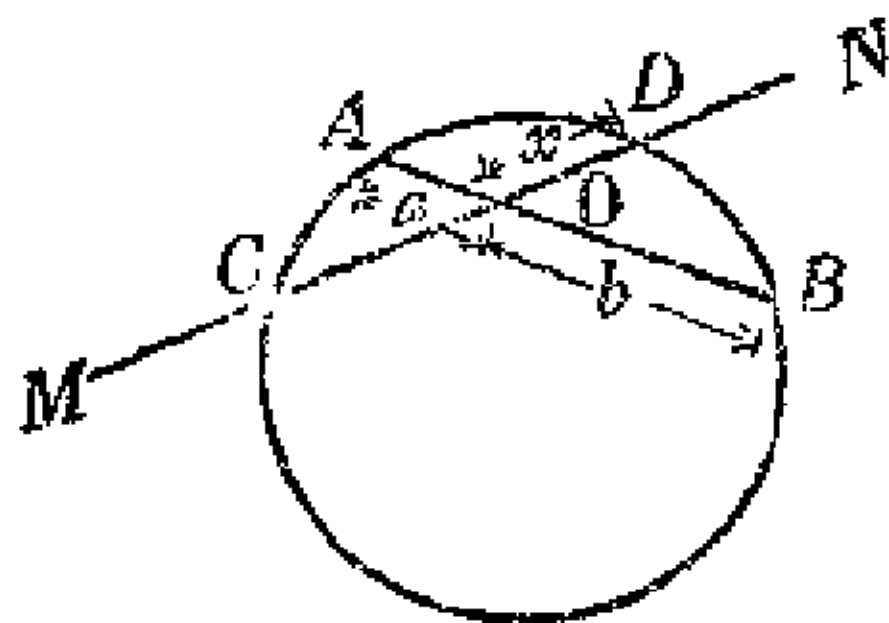


图 13.

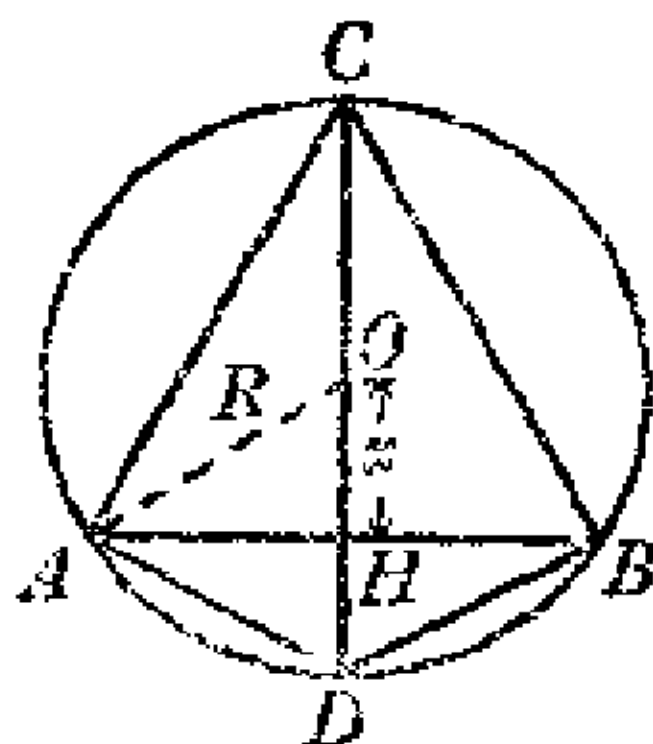


图 14.

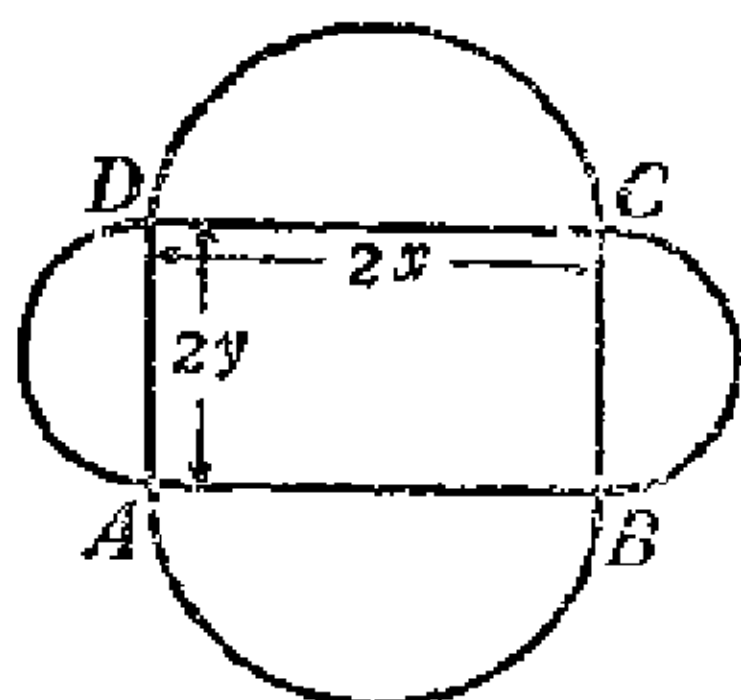


图 15.

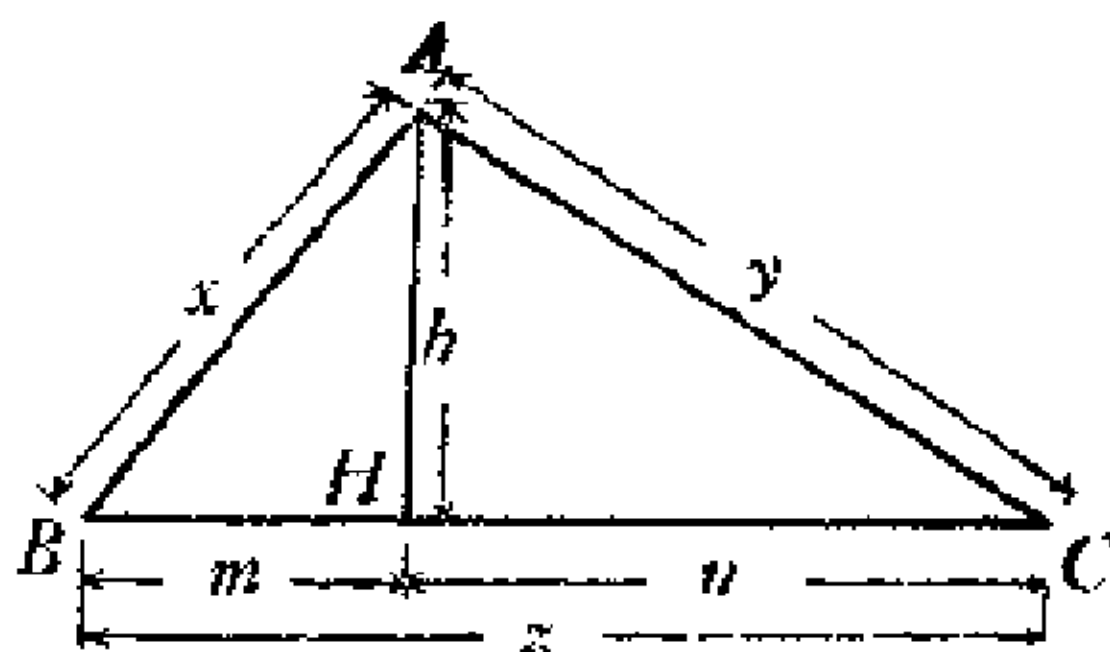


图 16.

把弦的終点 A, B 同直徑的終点 C, D 联接起来。試求以弦做共底的二个三角形的差的最大值。

6. 用周长是常数 $4p$ 的长方形的各边做直徑, 作四个在长方形之外的半圓周(图 15), 在用这四个半圓周做边界的所有图形中, 求面积是最小的一个。

7. 給定所有这样的直角三角形, 它們的高在弦上所确定的二个綫段之一(图 16)和这高的积是定值。試在所有这样的直角三角形中, 求弦是最小的一个。

8. 設挖一地窖, 形状是底是正方形的中空的正棱柱, 面积(五个面的面积的和)是定值 a^2 。試求容积是最大的一个。

9. 在全面积是定值 $2\pi a^2$ 的所有圆柱中, 求容积是最大的一个.

10. 设周长是定值 $2p$ 的长方形绕它的长是 y 的边旋转而产生柱体; 试问长方形的边长应该怎样, 才使柱体的容积最大?

11. 在容积是定值 $2\pi a^3$ 的所有圆柱中, 求内接于最小球的一个.

12. 在边长是 a 的一个等边三角形的所有内接等边三角形中, 求面积是最小的一个.

13. 在一个给定的圆柱的所有外接圆锥中, 求容积是最小的一个.

14. 在所有内接于椭球①

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

的长方体中, 求容积是最大的一个.

15. 设计制造一无盖的圆柱形水柜, 它的容积是定值, 在内部涂上一层一定厚度的铅. 试问这柜的深度和它的底的半径应该怎样, 才使所费的铅是最少?

附录 习题答案和提示

1. 等腰直角三角形.

2. 等边三角形.

3. 从物理学知道, 亮度 I 是同 $\sin \phi$ 成正比, 而同距离 $r=AB$ 的平方成反比, 即

$$I = c \frac{\sin \phi}{r^2},$$

其中 c 是同灯光强度有关的常数.

若取角 ϕ 做自变量, 那末有

$$r = \frac{a}{\cos \phi}, \quad I = \frac{c}{a^2} \cos^3 \phi \sin \phi,$$

① 根据解析几何, 方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 表示一椭球.

而問題就是求積 $\cos^2 \phi \sin \phi$ 的最大值。

所求的距离 h 是 $\frac{a}{\sqrt{2}}$ 。

4. 設 $a=OA, b=OB, x=OD$, 那末所求的 $x=\sqrt{ab}$ 。

5. 設 $OH=x$, 那末所求的 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}R$, 而二个三角形的差的最大值是 R^2 。

6. 設 $2x, 2y$ 是长方形的边, 那末所求的是 $x=y=\frac{p}{2}$ 。

7. 設 z 是弦, h 是高, $BH=m, mh=k^2$, 其中 k 是給定的一个常数, 那末最小的弦是 $\frac{4k\sqrt[3]{3}}{3}$ 。

8. 設 x 是底的边长, 那末所求的 x 是 $\frac{a\sqrt{3}}{3}$, 而最大容积是 $\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$ 。

9. 設 x 是圓柱的底的半徑, 那末所求的 x 是 $\frac{\sqrt{3}}{3}a$, 而最大容积是 $\frac{2\pi a^3\sqrt{3}}{9}$ 。

10. 設 x, y 分別是长方形的边长, 那末所求的是 $x=\frac{2p}{3}, y=\frac{p}{3}$, 而最大容积是 $\frac{4\pi p^3}{27}$ 。

11. 設 y 是圓柱的高的一半, R 是球的半徑, 那末所求的是 $y=\frac{a}{\sqrt{2}}$, 而最小球的半徑的平方是 $\frac{3a^2}{2}\sqrt[3]{2}$ 。

13. 設 x 是外接圓錐的半徑, R 和 h 分別是給定的圓柱的半徑和高, 那末所求的是 $x=\frac{3R}{2}$, 而最小容积是 $\frac{9\pi R^2h}{4}$ 。

15. 最省鉛的制造法是水柜的深度等于它的底的半徑。

后 記

本書的初稿，承王家璽、李耀堂二同志看过一遍，并提出不少宝贵意見；以后又經中国青年出版社自然科学編輯室也提出了一些意見，統此志謝。